

**Tradução por:** Franciele Cristine Mielke

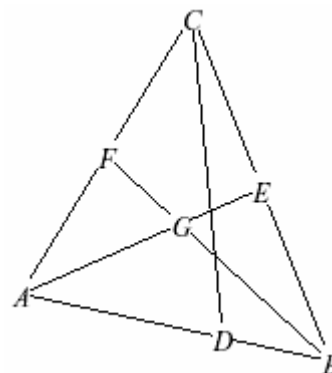
### Atividades introdutórias

0. Abra o Wingeom com um duplo clique do mouse no seu ícone. Clique no item **2-dim** no menu janela, localizado na barra de ferramentas. Isto criará uma pequena janela gráfica. De agora em diante, você usará a barra de ferramentas desta janela. Itens em negrito na barra de ferramentas significam que são os itens que podem ser clicados com o mouse. Atalhos no teclado, como Enter, Esc e Ctrl + W são escritos geralmente à direita do item no menu escolhido.

1. Os botões esquerdo e direito do mouse realizam diferentes funções, dependendo do item que está selecionado no menu Botões. O modo padrão selecionado é **Botões|Segmentos**. Selecione este item com um clique sobre ele, então aponte para quaisquer três pontos da janela gráfica e clique com o botão direito do mouse em cada um desses pontos. Os pontos serão legendados como A, B, e C. Com a seta do mouse sobre o ponto A, segure o botão esquerdo do mouse e arraste até o ponto B, soltando então o botão do mouse. O segmento AB agora aparece na tela (a menos que o botão do mouse tenha sido solto não em cima do ponto B). Repita o processo para desenhar os segmentos BC e CA.

2. Com um clique no botão direito do mouse sobre o segmento AB, cria um novo ponto D, uma vez que o programa sempre seleciona a primeira letra disponível para legendar um novo ponto. Clicar com o botão direito do mouse é uma maneira de marcar um ponto sobre um segmento. Outra maneira é: Clique em **Pontosobre o Segmento**, digite na caixa de diálogo “relativo ao segmento” BC, CA - note que a caixa de diálogo “coordenada” mostra o valor 0.5, que indica que os novos pontos estarão no meio dos respectivos segmentos - e então clique **marcar**. As legendas E e F aparecerão como pontos médios do segmento BC e CA, respectivamente. Feche a caixa de diálogo “novo ponto” pressionando-se Esc ou clicando em **fechar**. Use o botão esquerdo do mouse para desenhar os segmentos CD, AE, e BF, como no passo 1. Aponte a seta do mouse para a interseção de AE e BF e clique com o botão direito do mouse. A interseção do ponto será legendado com G, como mostrado.

3. Clique em **Botões|Arrastar vértices** para colocar o mouse num modo diferente. Aponte a seta do mouse em B, clique e segure o botão esquerdo do mouse (note que a cor da legenda muda), e arraste o mouse. Enquanto o ponto B se move, o restante da figura se ajusta adequadamente à sua posição. Em particular, E mantém sua posição como ponto médio do segmento BC, e D se mantém em sua posição relativa no segmento AB. Estes ajustes continuam até você soltar o botão esquerdo do mouse. Isto é chamado arraste do ponto B. Apontando-se a seta do mouse para o ponto A e C estes também podem ser arrastados. Se você tentar arrastar os pontos E ou F, contudo, todo o triângulo se move rigidamente. Pense por que isso acontece. Se você tentar arrastar o ponto D, você perceberá que este se move, mas somente ao longo do segmento em que ele foi colocado. Note que a interseção G das medianas AE e BF não está necessariamente sobre o segmento CD ou FB (dependendo de como foi feita a construção).



4. Clique **Medidas** para abrir uma nova caixa de diálogo. O cursor está intermitente (piscando) em uma caixa de edição. Digite a razão AD/AB dentro da caixa (o programa não faz distinção entre letras minúsculas e maiúsculas) e pressione Enter. O valor atual desta razão é mostrado tanto nesta caixa de diálogo quanto na janela gráfica. Isto se deve ao fato

de que a caixa de diálogo **Medidas** deve ser fechada (pressionando Esc) antes das operações na janela gráfica serem retomadas. Volte a arrastar o ponto D ao longo de AB. O valor mostrado de AD/AB diz exatamente a posição de D no segmento. Note qual é o valor desta razão quando G parece estar sobre o segmento CD ou FB (dependendo de como foi feita a construção). O que você pode supor a respeito disso?

5. O programa não só designa legendas (letras) aos novos pontos, como também centra estas legendas bem em cima dos pontos, e coloca as medidas no canto superior esquerdo da janela gráfica. Você pode mudar estas escolhas. Primeiro Clique em **Botões|Texto** para colocar o mouse em um novo modo. Coloque a seta do mouse sobre o ponto A e pressione com o botão direito do mouse. Uma nova caixa de diálogo permite que você mude a legenda (letra). Digite P na caixa e pressione Enter. Você verá que a legenda A muda para P. Do mesmo modo, mude a legenda B para Q. Note que a razão AD/AB mostrada é agora “indefinida”, então clique em **Medidas**, selecione AD/AB na lista, e clique **apagar**. Digite PD/PQ, pressione Enter, e pressione Esc.

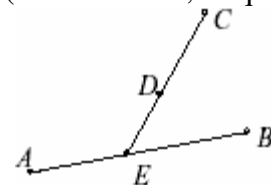
Em seguida, aponte a seta do mouse em qualquer legenda na figura, segure com o botão esquerdo do mouse, arraste um pouco o mouse, e solte o botão. O ponto não se move, mas a sua legenda (letra) sim. Note que o ponto é marcado por um pequeno círculo, geralmente escondido pela legenda. Clique em **Editar|Legendas|Do lado** para mover todas as legendas (mas raramente as legendas são colocadas em um local satisfatório). Clique em **Editar|Legendas|Em cima** para re-centralizar todas as legendas. Para escolher uma fonte diferente para as legendas, clique em **Editar|Legendas|Fonte**.

6. Quando o mouse está no modo **Botões|Texto**, o botão direito do mouse é usado para colocar um texto novo ou editar um já existente em qualquer lugar na tela, e o botão esquerdo é usado para arrastar (reposicionar) o texto. Por exemplo, arraste a medida para um lugar próximo do segmento PQ. Para colocar todos os cálculos de volta para suas posições padrão, clique **Outros|Medidas|Posições iniciais**.

7. Clique em **Arquivo|Novo** para começar um novo desenho. O programa perguntará se você quer salvar o seu trabalho. Responda não.

8. Coloque o mouse no modo **Botões|Segmentos**, com o clique no botão direito do mouse crie quatro novos pontos, então use o botão esquerdo do mouse para criar segmentos AB e CD. Coloque o mouse no modo **Botões|Arrastar vértices**, e arraste alguns dos pontos de modo que os segmentos se interceptem. Aqui está uma nova maneira de legendar a interseção que é muito útil: Clique em **Ponto|Interseção|Reta-reta**, digite AB em uma das caixas de edição, CD na outra, e pressione Enter. A legenda (letra) E aparecerá. Pressione Esc para fechar a caixa.

9. Esteja certo de que **Outros|Autoestender** não esteja selecionado (se necessário, clique nele para remover a seleção). Arraste B para algum lugar tal que os segmentos AB e CD não se interceptem mais, e note que E desaparece. Agora selecione **Outros|Autoestender**. Note que os segmentos agora são estendidos tanto quanto necessário para mostrar a sua interseção, independente de onde os pontos foram arrastados.



10. Clique em **Editar|Desfazer** (ou pressione Ctrl+Z). Isto desfaz as construções mais recentes, por isso a interseção E não está mais legendada. Clique em **Editar|Refazer** (ou pressione Ctrl+Y) para refazer o último passo. Você pode sempre clicar em **Outros|Listas|História** para ver a descrição do passo a passo da figura atual. (o texto mostrado não muda se você fizer qualquer coisa no desenho. Para atualizar o conteúdo, é necessário fechar a lista **História** e então reabri-la).

11. Comece uma tela em branco clicando em **Arquivo|Novo**, então clique em **Ponto|Coordenadas** para abrir uma caixa de diálogo para entrada de coordenadas. Digite 3 na caixa x, 1 na caixa y, e pressione Enter (ou clique **marcar**). O ponto A = (3, 1) aparecerá. Do mesmo modo, os pontos B = (5, 2) e C = (6, -5). Feche esta caixa de diálogo. Clique em **Ver|Eixos** (ou pressione Ctrl + A) para o eixo de coordenadas desaparecer (você pode fazê-lo reaparecer da mesma maneira).

12. Coloque o mouse no modo **Botões|Arrastar vértices**, então descubra que você não pode arrastar qualquer um dos pontos sem mover todo o pedaço ou papel gráfico. Isto se dá pois os pontos foram definidos para se manter num único lugar (as suas coordenadas).

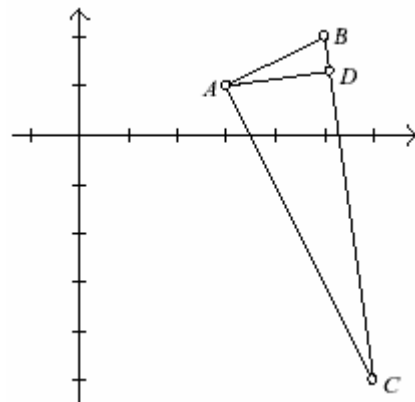
13. Clique em **Medidas** para abrir sua caixa de diálogo. Digite  $\angle ABC$  na caixa de edição e pressione Enter. O tamanho do ângulo ABC é mostrado. O símbolo de desigualdade diz ao programa que o valor de um ângulo é requisitado (neste caso o ângulo ABC). Se você tentar descrever o mesmo ângulo apenas como  $\angle B$ , o programa não entenderá, por isso a necessidade da descrição do ângulo com três legendas que o determinam de forma única. Digite ABC na caixa de edição e pressione Enter para ver a área do triângulo ABC. Digite  $AB+BC+CA$  e pressione Enter para ver o perímetro do triângulo ABC. Para desfazer a seleção do perímetro (que estará em realce na cor azul) na lista, clique sobre ele. Então clique na medida do ângulo para selecioná-lo. Clicando no botão **esconder**, faz a medida selecionada desaparecer da tela, e clicando em **mostrar** faz reaparecer. Pressione Esc para fechar a caixa de diálogo.

14. Se você quiser uma informação dimensional anexada às medidas mostradas (para designar comprimento, área e ângulos), o item **Outros|Medidas|Mostrar Unidades** deve ser selecionado. Até as medidas que aparecem na tela serem atualizadas, nada acontece após você mudar este item.

15. Clique em **RetalPerpendiculares|Altitudes**, digite BC na caixa "perpendicular à reta", A na caixa "pelo ponto" e clique desenhar. O segmento AD aparece, construído tal que D está sobre o segmento BC e o ângulo ADB é reto. Pressione Esc para fechar a caixa de diálogo (ou clique no botão fechar).

16. Clique em Medidas para abrir essa caixa de diálogo novamente. Digite D e pressione Enter. Você deve ver que as coordenadas de D são (5.1, 1.3). Para confirmar que AD intercepta BC perpendicularmente, digite  $\angle ADB$  e pressione Enter. Pressione Esc para fechar a caixa de diálogo. Clique em **Outros|Listas|Retas** para abrir uma janela de texto que enumera todas as combinações de pontos colineares na figura. Se os eixos coordenados são mostrados, uma equação Cartesiana é apresentada para cada reta, bem como sua inclinação em relação ao eixo x. Clique **fechar** para esconder esta caixa de texto.

17. Se você preferir ter as funções do mouse mais visíveis (ao invés de estarem escondidas em um menu), clique em **Botões|Barra de ferramentas**. Esta caixa de diálogo pequena, móvel mostra a função corrente do mouse, e apresenta outras maneiras para alterá-la. Coloque o mouse no modo **Arrastar vértices**. Como você já tinha percebido, ao se arrastar qualquer um dos pontos legendados, simplesmente toda a folha gráfica é arrastada através da tela. Faça isso agora, e tente fazer com que alguns de seus vértices desapareçam de vista (se seu desenho não preenche a tela, você pode fazer todo o triângulo desaparecer). Para



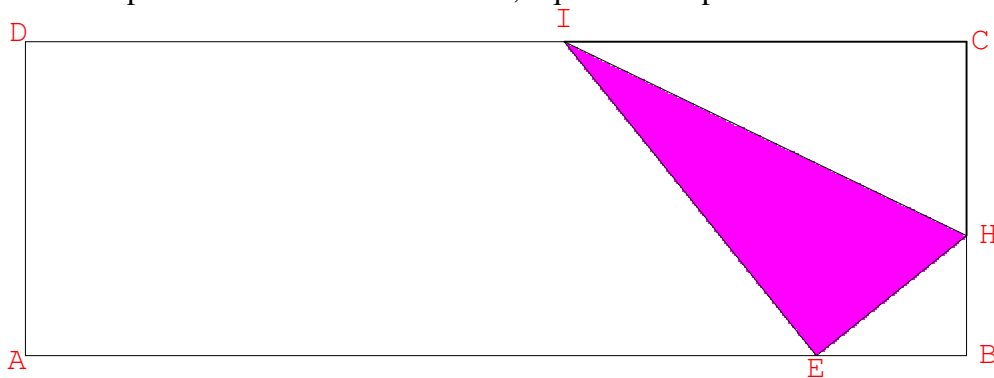
restabelecer rapidamente qualquer figura ao centro da tela, de forma que todas as suas partes estejam visíveis, clique em **Ver|Janela** (ou pressione Ctrl+W). Isto também reposiciona quaisquer medidas.

18. Clique em **Arquivo|Novo** para começar uma nova figura. Se o eixo coordenado ainda é mostrado, pressione Ctrl+A para tirá-lo da tela. Clique em **Unidades|Polígono|Paralelogramo**, digite 12 na primeira caixa ‘lado’, mude o ‘ângulo’ para 90 e a segunda caixa ‘lado’ para 4, então pressione Enter (ou clique **ok**). Um retângulo ABCD deve aparecer. (Pelo fato de sua largura ser três vezes a altura, pode ser que a figura não caiba na janela atual, mas pode-se mudar o tamanho e a forma da janela arrastando suas bordas). Coloque o mouse no modo **Botões|Segmentos** e com um clique no botão direito do mouse crie o ponto E sobre o segmento AB, mais próximo de B, com uma distância pouco menor que a de B à C. Então use o botão esquerdo para desenhar o segmento CE.

19. Clique em **Retal|Perpendiculares|Mediatriz**, digite CE na caixa de edição, e pressione Enter. A mediatriz FG passa através do ponto médio F do segmento CE. E também intercepta os lados BC e CD. Use o botão direito do mouse para legendar essas interseções, com H em BC e I em CD. Então use o botão esquerdo para desenhar os segmentos EH e EI.

20. Os pontos F e G não são mais necessários, portanto podem ser apagados. Para isso clique em **Editar|Apagar|Ponto**, digite F G na caixa e pressione Enter. Clique em **Editar|Apagar|Reta**, digite a lista CE,CH,CI na caixa e pressione Enter. Para transformar a mediatriz HI em um segmento clique em **Retal|Extensões**, digite a lista HI, IH na caixa, e pressione Enter. (As semi-retas HI e IH são então apagadas. Pode-se retorná-las fazendo o mesmo processo).

21. Use o botão esquerdo do mouse para re-conectar os segmentos DI, IC, CH, e HB. A razão para esta estranha mudança será explicada a seguir. Clique em **Editar|Realces|Atributos da reta**, digite a lista CH,CI na caixa de edição, clique no botão **estilo** até que a palavra ‘tracejado’ apareça, e clique em **aplicar**. Em virtude de ter sido ‘dito’ ao programa para ‘esquecer’ que C, I, e D são colineares (esta foi a razão para apagar o segmento CD e então redesenhá-lo em dois pedaços), o estilo tracejado não é aplicado em DI. Feche a caixa de diálogo. Clique em **Editar|Realces|Preencher regiões**, digite EHI na caixa ‘polígono’, clique em cor e escolha a cor magenta, e pressione Enter. O triângulo EHI deve agora estar preenchido na cor magenta. Feche esta caixa de diálogo, e pressione Ctrl+W para centralizar o desenho, que deve parecer com a ilustração abaixo.



22. Esta construção simula o dobrar de uma folha retangular de papel, de forma que um dos cantos (C) é representado na dobra por (E) no outro lado. Os segmentos tracejados marcam onde o papel estava, antes de ser dobrado, e a cor magenta é a cor do lado de trás da folha.

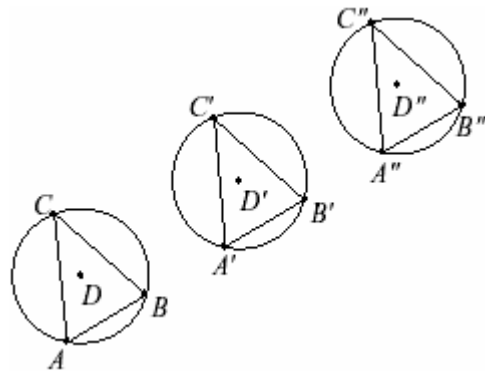
23. Coloque o mouse no modo **Botões|Arrastar vértices** esteja certo que o item **Outros|Autoestender** não está selecionado. Use o botão esquerdo do mouse para arrastar E ao longo do lado AB. Mova o mouse vagarosamente, mantendo E próximo de B. Se você arrastar o vértice E muito para a esquerda, a construção entrará em colapso, porque as instruções não fazem sentido se EB é maior que BC. (H tem que estar no lado BC).

24. Abra a caixa de diálogo **Medidas** e digite  $\angle BHE$  e  $2\angle HIC$  (um de cada vez, pressionando Enter depois de cada um). Pressione Esc para fechar a caixa de diálogo. Note que a igualdade destas duas medidas não é afetada ao se mover E ao longo de AB. Explique por que isto deveria ser esperado.

25. Clique em **Arquivo|Novo** para começar uma nova figura. (Podem-se ter muitos desenhos abertos ao mesmo tempo – apenas clique em **2-dim** novamente na barra de menu principal – mas isso não é necessário agora). Clique em **Unidades|Aleatório|Triângulo**. Este é um método que com um clique do mouse coloca-se três pontos aleatórios na tela, conectados com segmentos formando assim um triângulo.

26. Clique em **Circunferencial|Circ circunscrita**. A caixa de diálogo resultante provavelmente já tenha selecionado os pontos ABC na caixa de edição, então apenas pressione Enter. O programa constrói a circunferência circunscrita do triângulo (ou a circunferência que contenha os três pontos A, B e C). O centro da circunferência é legendado com a letra D. O programa reconhece a circunferência pelo seu centro e o último ponto da circunferência (na escala alfabética crescente). Portanto, ao se apagar o centro de uma circunferência necessariamente a circunferência também será apagada. Para evitar que isso aconteça inadvertidamente, o programa não deixará você fazer isso: Clicar em **Editar|Apagar|Ponto**, digitar D na caixa de edição e pressionar Enter. Aparecerá uma caixa com uma mensagem de erro ‘necessário para a circunferência’, em tão clique em **ok** para fechar esta caixa. A mesma mensagem apareceria se você tentasse apagar o único ponto marcado na circunferência.

27. Clique em **Transf|Transladar**, digite 2 na caixa ‘pelo múltiplo’, e AB na caixa ‘do vetor’ (se ele já não estiver lá). Deixe a caixa ‘vértices’ como aparece, para que ele liste todos os vértices da figura em questão. Para ver o resultado, pressione Enter. Note que a nova figura consiste de dois triângulos, duas circunferências, e oito vértices, de forma que os quatro novos vértices são legendados como os pontos que o originaram acrescentado de um traço (primo). Clique em **Transf|Repetir último** (ou pressione F7). Isto aplica a transformação corrente novamente. A figura deve parecer como a ilustração ao lado.



28. Com o mouse no modo **Botões|Arrastar vértices**, arraste o vértice C pela tela, e note o que acontece a todas as imagens. Pelo fato da translação ser definida em termos do segmento AB, o efeito é muito diferente se você arrastar B pela tela. Tente isso. Note que você não pode arrastar outros pontos além de A, B ou C sem arrastar toda a figura rigidamente. Por que isso é esperado?

29. Clique **Transf|Transladar** novamente, digite 2 na caixa ‘pelo múltiplo’, digite AC na caixa ‘do vetor’, e deixe a caixa ‘vértices’ preenchido com a lista que aparece de todos os vértices. Pressione Enter, então pressione F7. Você deve estar vendo agora nove triângulos, nove circunferências, e seus centros, e trinta e seis legendas. O programa legenda os

vértices transformados usando subscritos e primos (traços). Ter muitas legendas de pontos na tela ao mesmo tempo pode ser confuso, então pressione Ctrl+L (que é mais fácil do que clicar em **Editar|Legendas|Letras on/off**) para tirar as legendas dos pontos. (Elas podem ser retornadas da mesma forma). Sem as legendas, pressione Ctrl+D (que pode ser feito clicando em **Editar|Legendas|Tipo de ponto**) várias vezes. Note que esses pontos são marcados por bolas abertas, em X, em cruz, em nada ou em bolas fechadas por fim. Com os pontos no tipo bola aberta, clique em **Editar|Legendas|Tamanho do ponto**, digite um número inteiro na caixa de edição e pressione Enter. O tamanho padrão para as bolas aberta e fechada é 4, mas você pode querer um tamanho diferente (e o programa salva sua preferência).

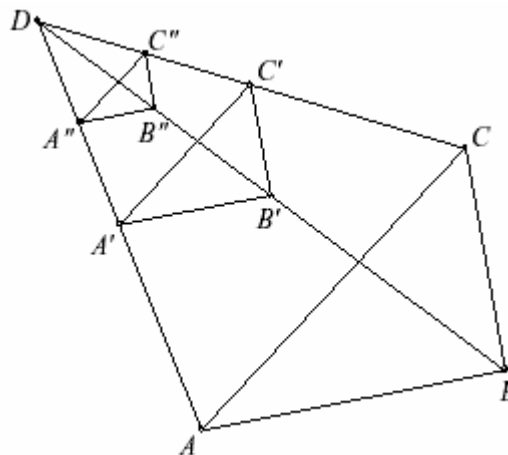
30. Clique em **Arquivo|Novo** para começar uma nova figura. Clique em **Unidades|Aleatório|Triângulo** novamente. Com o mouse no modo **Botões|Segmentos**, clique com o botão direito do mouse para criar um ponto D qualquer, bem longe do triângulo ABC. Clique em **Transf|Dilatar**. Isto ativa uma caixa de diálogo que é usada para definir tanto rotações quanto dilatações (ou combinações das duas). Ele está configurado para uma dilatação simples, com 0.0 na caixa “ângulo”. Digite D na caixa “usando centro”, ABC na caixa “vértices” e pressione Enter. Pressione F7 uma vez para aplicar a dilatação novamente.

31. Use o botão esquerdo do mouse para desenhar os segmentos DA, DB, e DC. Os pontos A' e A'' parecerão estar no segmento DA. Essa propriedade se deve à definição de dilatação, onde se sabe que estes pontos são colineares. Contudo, os pontos não foram marcados no segmento (que apareceu mais tarde na construção, de qualquer forma), e o programa não conhece qualquer teorema da geometria, então ele não reconhece que A' e A'' estão de fato em DA. Para ver a evidência deste fato, clique em **Editar|Apagar|Reta**, digite AA' na caixa de edição e pressione Enter. Note que nada desaparece da figura.

32. A figura deve ser semelhante à figura ao lado. Coloque o mouse no modo **Botões|Arrastar vértices**, e arraste os vértices primários ( A, B, C e D) pela tela. O efeito na figura quando D é movido é muito diferente do efeito quando se move o ponto A.

33. Se o item **Transf|Salvar legendas** estiver selecionado, clique neste item para desfazer a seleção. Então clique em **Transf|Transladar**, digite AB na caixa “do vetor”, ABC na caixa “vértices”, e pressione Enter. Um novo triângulo aparece, provavelmente nomeado como  $A_0B_0C_0$ . De acordo com a definição de translação de vetor, os pontos  $A_0$  e B tem que coincidir.

Contudo, o Wingeom determinará uma nova legenda para o que é na verdade o mesmo ponto. O programa acha que os pontos são diferentes, porque  $A_0$  teve que ser calculado, e pode se diferir de B na vigésima casa decimal! Esta é uma situação na qual você pode ignorar a deficiência de interpretação do programa: Clique em **Editar|Desfazer** (ou pressionar Ctrl+Z) para desfazer a translação, clique em **Transf|Salvar legendas** para retomar este item, então clique em **Editar|Refazer** (ou pressione Ctrl+Y) para refazer a translação. Note que o ponto  $A_0$  não aparece desta vez. O programa teve a permissão para prestar atenção à proximidade de  $A_0$  e B como razão suficiente para identificar estes pontos



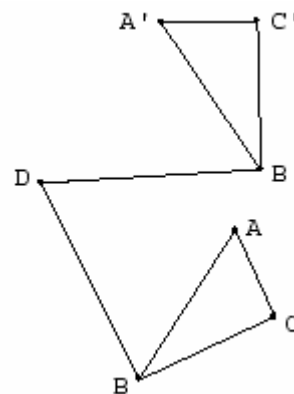
em seus registros. A propósito, esta característica só se aplica aos novos pontos gerados pelo menu **Transf**.

34. Clique em **ArquivolNovo** para começar uma nova figura. Clique em **UnidadesAleatórioTriângulo retângulo**. Mesmo que os vértices desta figura tenham sido gerados aleatoriamente, eles não podem ser arrastados de forma independente um do outro. Tente – o triângulo move-se rigidamente como uma unidade. Isto se deve pelo fato de o programa ter sido ensinado a respeitar a definição de ângulo reto.

35. Coloque o mouse no modo **BotõesSegmentos** e com um clique no botão direito do mouse crie um ponto qualquer D na tela, em algum lugar fora do triângulo ABC. Clique em **TransfRotacionar**, digite D na caixa “usando centro”, note que o “fator de dilatação” é 1.0 (ou seja sem dilatação), digite ABC na caixa “vértices”, e digite 90# na caixa “ângulo” (você deve incluir o símbolo #). Pressione Enter para ver o resultado da rotação do triângulo ABC em volta do ponto eixo D. O tamanho do ângulo de rotação depende do valor do número #. Antes de se descobrir seu valor no próximo parágrafo, faça uma estimativa dele examinando sua figura.

36. Clique em **AnimVariação de #**. A caixa de diálogo resultante (que pode ficar aberta indefinidamente) mostra o valor atual de #, e oferece poucas maneiras de mudar esse valor. Um método é digitar um novo valor no texto em realce, então digite 0.5 na caixa de edição e pressione Enter. Note que a figura muda conforme se muda o valor de #: Vê-se agora o resultado da aplicação de uma rotação de 45 graus, centrado em D, ao triângulo ABC. Aponte para umas das setas no final da barra de rolagem, pressione com o botão esquerdo do mouse e segure-o. O controle deslizará vagarosamente, e o valor de # muda como resultado. Conforme # muda, muda-se também o tamanho do ângulo de rotação 90#. Você pode também deslizar o controle diretamente segurando-o e arrastando ao longo da barra de rolagem. Uma maneira mais simples é clicar em **autorev**, que move a barra automaticamente para frente e para trás. Note que a caixa de diálogo desaparece, e que o cabeçalho da janela gráfica diz que se deve pressionar a tecla S se você quiser que a animação pare. Assista por um momento, então pressione S.

37. Clique em **RetalSegmentos**, digite BDB' na caixa de edição e pressione Enter. Os segmentos BD e DB' aparecem. Clique em **EditarRealcesAtributos da reta**, digite BDB' na caixa de edição, clique no botão **estilo** até a palavra “tracejado” aparecer, e pressione Enter. Pressione Esc para fechar esta caixa de diálogo. Sua figura deve ser semelhante à ilustração.



38. Clique em **Medidas** para abrir essa caixa de diálogo. Digite # e pressione Enter. Digite 90# e pressione Enter. Digite <BDB' e pressione Enter. Feche a caixa. Explique a coincidência dos valores mostrados. Use a caixa variação de # para variar o valor de #, e note a mudança que se apresenta.

39. Clique em **TransfSalvar legendas** para ativá-lo. Clique em **TransfRotacionar**, digite D na caixa “usando centro”, A'B'C' na caixa “vértices”, 90# na caixa “ângulo”, então pressione Enter. O triângulo A'B'C' aparece. Pressione F7 quatro vezes. Deve haver agora na tela sete triângulos sendo o último deles  $A_3B_3C_3$ .

40. Digite  $2/3$  na caixa de edição que mostra o valor corrente de #, e pressione Enter. Explique por que há agora somente seis triângulos na tela. Para onde foi  $A_3B_3C_3$ . Se você precisar de uma pista, digite 0.6 na caixa de edição e pressione Enter.

41. Para mudar o número de casas decimais que são mostradas dos cálculos, clique em **Editar|Decimais**, digite um inteiro não negativo menor que 19 e pressione Enter. O novo formato para qualquer valor numérico apresentado aparecerá depois de atualizado. Por exemplo, você pode usar o mouse para arrastar o triângulo original ABC pela tela para atualizar os valores e estes aparecerem no novo formato com mais ou menos casas decimais (conforme o que foi escolhido).

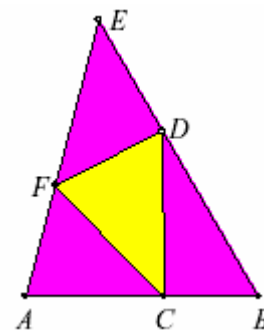
42. Clique em **Arquivo|Novo** para começar uma nova figura. Para um começo bem simples, clique em **Unidades|Segmento**, e pressione Enter. Um segmento com uma unidade de comprimento (este comprimento se refere à escala da janela gráfica básica) aparece. Clique em **Retal|Ângulos|Novos ângulos**, digite AB na caixa “reta inicial”, 75 na caixa “valor do ângulo”, e pressione Enter. A semi-reta AC aparece. Agora digite BA na caixa “reta inicial” e -60 na caixa “valor do ângulo”, e pressione Enter novamente. A semi-reta BD aparece. Note o uso de um sinal de menos para determinar o segundo ângulo. Qual valor positivo produziria a mesma semi-reta BD?

43. A interseção destas semi-retas poderia não aparecer na parte visível da janela gráfica. Uma maneira de legendar esta interseção (se eventualmente não esteja visível) é clicar em **Ponto|Interseção|Reta-reta**, digite AC e BD nas caixas, e pressione Enter. A interseção E deve agora estar visível.

44. O triângulo ABE foi construído tal que seus ângulos são 75, 60 e 45 graus. Para terminar o trabalho, clique em **Editar|Apagar|Ponto**, digite CD na caixa, e pressione Enter. Clique em **Retal|Extensões**, digite a lista AE, BE na caixa e pressione Enter.

45. Digite 0.6 na caixa de edição que mostra o valor corrente de #, e pressione Enter. Então clique no item **Ponto|Sobre o segmento**. Esta maneira de marcar pontos em segmentos oferece possibilidades ilimitadas para animação e controle. Por exemplo, digite a lista AB, BE,EA na caixa “relativo ao segmento”. Se você clicasse em **marcar** agora, com 0.5 na caixa “coordenada”, você veria todos os três pontos médios dos lados do triângulo ABE aparecerem. Ao invés disso, coloque no lugar de 0.5 o símbolo #, que você sabe que seu valor está em 0.6, e pressione Enter. O ponto C aparece no segmento AB, 60% da distância de A a B, o ponto D aparece no segmento BE, 60% da distância de B a E, e o ponto F aparece no segmento EA, 60% da distância de E a A.

46. Coloque o mouse no modo **Botões|Segmentos** e use o botão esquerdo do mouse para conectar os vértices CDF formando assim um triângulo. Note que o programa reusa as legendas descartadas C e D. Clique em **Editar|Realces|Preencher regiões**, digite ABE na caixa “polígono”, clique em **cor** e selecione a cor vermelha, e clique em **preencher**. O triângulo maior agora está preenchido interiormente de vermelho. Digite CDF na caixa de edição e clique em preencher novamente. Note que foi necessário colorir o triângulo maior primeiro. Feche a caixa de diálogo. A figura deve parecer como a ilustração.



47. Clique em **Medidas** para abrir essa caixa de diálogo, solicite a razão das áreas CDF/ABE (lembre-se que tanto faz digitar em maiúscula ou em minúscula), e feche a

caixa. O valor mostrado indica que a área do triângulo CDF é 28% ou (0.28) da área do triângulo ABE.

48. Prediga o valor da razão entre as áreas quando C, D e F forem os pontos médios de seus respectivos lados. Selecione # igual a 0.5 para ver se você acertou. Pode CDF ser exatamente 50% de ABE?

49. Faça a janela gráfica estar ativa (clique na sua barra de títulos, por exemplo), pressione Ctrl+L para tirar as legendas, pressione Ctrl+D um par de vezes para colocar o ponto no modo invisível, então clique em **Autorev** na caixa de diálogo valor corrente de #. Lembre-se de pressionar a tecla S para parar a animação.

### Investigação da parábola

1. Para construir uma parábola, você precisa de uma diretriz e um foco. Coloque o mouse no modo **Botões|Segmentos** e com o botão direito do mouse gere três pontos na tela, com A mais próximo do canto inferior esquerdo, B mais próximo do canto inferior direito, e C próximo do centro da janela gráfica. O local exato não é importante, pois os ajustes serão feitos mais tarde. Agora use o botão esquerdo do mouse para conectar A à B: Aponte a seta do mouse para um desses vértices, segure o botão esquerdo, arraste o ponteiro ao outro vértice, e solte. O segmento AB aparece.

2. Com um clique no botão direito do mouse crie um ponto D qualquer sobre o segmento AB. Para verificar se o ponto está realmente no segmento, coloque o mouse no modo **Botões|Arrastar vértices** e tente arrastar D. Ele deve deslizar somente ao longo de AB.

3. Coloque o mouse de volta do modo **Botões|Segmentos** e use o botão esquerdo para conectar C à D.

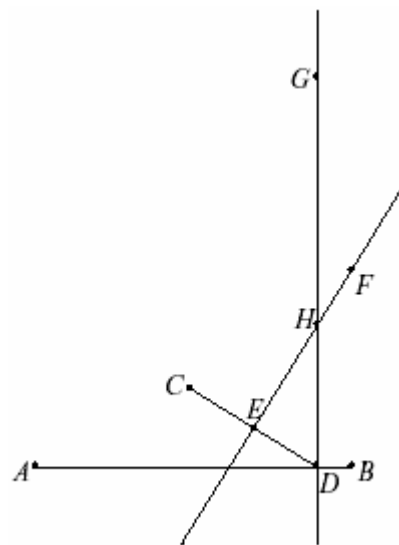
4. Para desenhar a mediatriz do segmento CD, clique em **RetalPerpendiculares|Mediatriz**, digite CD na caixa de edição e pressione Enter (ou clique em **ok**). O programa marca primeiro E como ponto médio de CD, e então desenha a mediatriz EF. (Para propósitos de identificação, o programa precisa de pelo menos dois pontos para cada reta, por isso é introduzido o ponto F). Todos os pontos que estão na reta EF têm uma propriedade especial – qual é?

5. Clique em **RetalPerpendiculares|Geral** para desenhar uma reta perpendicular à AB pelo ponto D. digite AB na caixa “perpendicular à” (que pode já estar lá) e D na caixa “pelo ponto”. Clique em **desenhar** para ver a reta DG. O enquadramento na tela provavelmente será reposicionada por causa destes novos pontos. Pressione Esc para fechar a caixa de diálogo.

6. A maneira mais simples de legendar a interseção H das retas DG e EF é colocar o ponteiro na interseção e clicar com o botão direito do mouse. (se a interseção não estiver aparecendo na janela, este método não funciona, no entanto. Outra maneira é clicar em **Ponto|Interseção|Reta-reta**, digite DG e EF nas caixas de edição, e pressione Enter). A figura deve se assemelhar com a ilustração.

7. Coloque o mouse no modo **Botões|Arrastar vértices**.

Então use o botão esquerdo para arrastar D para frente e para trás ao longo do segmento AB. Se o item **Outros|Autoestender** não estiver selecionado, selecione-o clicando sobre ele. Isto inclui a possibilidade de se deslizar D além dos limites do segmento AB.



8. Não importa em qual posição D está na reta AB, ele sempre é um ponto em AB que é \_\_\_\_\_ à H. Não importando qual a posição de D na reta AB, o que pode ser dito a respeito das distâncias de H ao ponto focal C e de H à diretriz AB?

9. Agora que o ponto H foi construído, os pontos F e G não são mais necessários, então clique em **Editar|Apagar|Ponto**, digite FG na caixa de edição, e pressione Enter. As retas DH e CD também já não são mais necessárias, então clique em **Editar|Apagar|Reta**, digite a lista DH, CD na caixa de edição e pressione Enter. Clique em **Ver|Janela** (ou pressione Ctrl+W) para reposicionar a figura na janela.

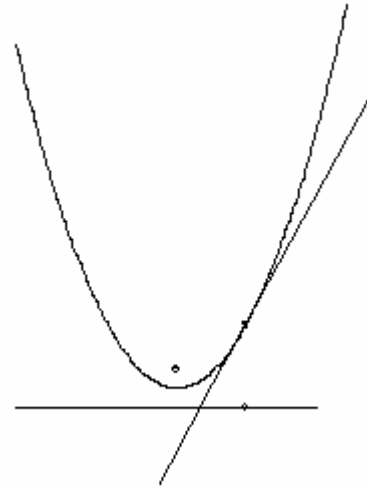
10. À medida que você desliza D ao longo de AB, tente visualizar o rastro que H deixa. Aqui está uma maneira fácil e fazer este rastro aparecer: Clique em **Anim|Traço temporário**, digite H na caixa de edição, e pressione Enter. Agora, quando se desliza D ao longo de AB, o programa mantém todas as posições correspondentes a H na figura. Para deixar um rastro mais detalhado, mova D vagarosamente. Este traço é temporário e desaparece assim que a tela é atualizada.

11. Como o rastro deveria ser se C estive muito próximo de ab? Para explorar tais questões, primeiro arraste C para uma nova posição e então regenere o rastro deslizando D ao longo de AB novamente.

12. Para um rastro permanente e contínuo, clique em **Anim|Traços**, então clique em **novo** na caixa de diálogo. Entre as opções de “controle” selecione “vértice” e digite D na caixa ao lado. Isto diz ao programa que o traço é gerado ao se deslizar o vértice D. Você pode deixar os valores padrão para “passos” (100), “menor” (0.0), e “maior” (1.0) como estão. Clique em **sobre o vértice**, digite H na caixa de edição e pressione Enter (ou clique **ok**). O programa coloca H para 100 posições de D, e conecta os pontos.

13. Clique em **Anim|Traço temporário**, esvazie a lista na caixa de edição, e pressione Enter. Isto desativa o rastro temporário remanescente.

14. Pressione Ctrl+L para tirar as legendas dos pontos. Elas não são mais necessárias. Pressione Ctrl+D até todos os vértices desaparecerem. Para realçar vértices específicos, abra a caixa de diálogo **Editar|Legendas|Individual**. Digite CDH na caixa de edição, desmarque a opção **mostrar legendas**, e clique na opção **bola aberta**. Agora



quando clicar em **aplicar**, os três vértices C, D e H devem ser visíveis, cada um identificado por uma bola aberta (círculo branco), como na figura. Feche a caixa de diálogo.

15. A mediatriz EH esteve à esquerda da figura por uma razão especial – ela possui uma relação especial com a parábola produzida pelo rastro de H. Ao deslizar D ao longo de AB, pense em algumas palavras que descrevem esta relação: \_\_\_\_\_

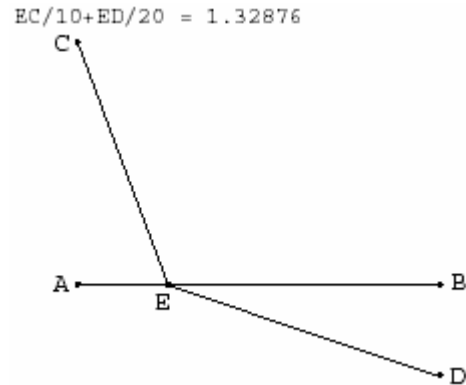
16. Se você quiser que o rastro reaja imediatamente quando os vértices do diagrama são movidos (C, por exemplo), selecione o item **Anim|Monitorar traços**. Se este item não estiver selecionado é necessário clicar em **Anim|Retraçar** para redesenhar os rastros.

### Investigação da lei de Snell

1. Clique em **Ponto|Coordenadas**. Na caixa de diálogo, digite 0 nas caixas de edição x e y. Pressione Enter (ou clique em **marcar**). O ponto A = (0,0) aparecerá na tela. Digite 12 na caixa de edição x e pressione Enter. O ponto B = (12, 0) aparece. Da mesma forma, marque

os pontos  $C = (0,8)$  e  $D = (12,-3)$ . Pressione Esc para fechar a caixa de diálogo. Clique em **VerlJanela** (ou pressione Ctrl+W) para centralizar a figura na janela. Pressione Ctrl+A para remover os eixos.

2. Coloque o mouse no modo **Botões|Segmentos**, então use o botão esquerdo para desenhar o segmento AB. Use o botão direito do mouse para criar um ponto E no segmento AB. Então use o botão esquerdo do mouse para desenhar os segmentos EC e ED.



3. Desmarque a opção **Outros|Medidas|Mostrar unidades**. Abra a caixa de diálogo **Medidas** e insira a soma  $EC/10 + ED/20$  na caixa de edição e pressione Enter. Pressione Esc para fechar a caixa de diálogo. A figura representa uma interface AB entre dois meios, e CED é o rastro deixado por um objeto cuja velocidade é 10 polegadas (25,4 cm) no meio superior e 20 polegadas (50,8 cm) no meio inferior.

A medida apresentada é o tempo total necessário para descrever o rastro.

4. Coloque o mouse no modo **Botões|Arrastar vértices**. Use o botão esquerdo para deslizar e para frente e para trás ao longo do segmento AB, tentando fazer com que a medida apresentada na tela seja a menor que você conseguir.

5. Uma vez que E estiver na posição na qual o valor apresentado seja o menor possível, abra a caixa de diálogo **Medidas**, digite AE para obter seu comprimento, pressione Enter e logo em seguida Esc para fechar a caixa de diálogo. Antes de mover, anote os dois valores mostrados da figura:  $AE = \underline{\hspace{2cm}}$  e  $EC/10 + ED/20 = \underline{\hspace{2cm}}$ .

6. Se o objetivo tivesse sido fazer o valor da soma  $EC/10 + ED/10$  o menor possível, sua busca não o levaria ao mesmo ponto E. Tente adivinhar qual ponto no segmento AB seria o ponto E para esta soma, fazendo a busca. Comece usando a caixa de diálogo **Medidas** para apagar a soma  $EC/10 + ED/20$  e coloque no seu lugar a soma  $EC/10 + ED/10$ . Anote os valores encontrados para o caso ótimo (ou seja o menor possível):  $AE = \underline{\hspace{2cm}}$  e  $EC/10 + ED/10 = \underline{\hspace{2cm}}$ .

7. Novo exemplo: Procure pelo ponto e que faça com que  $EC/20 + ED/10$  seja o menor possível. Anote o que você encontrou:  $AE = \underline{\hspace{2cm}}$  e  $EC/20 + ED/10 = \underline{\hspace{2cm}}$ . Note que o comprimento do segmento EC é o mesmo das duas soluções anteriores. Explique por que isso era esperado.

8. Clique em **RetalSegmento**, digite a lista AC,BD na caixa de edição e pressione Enter. Os segmentos AC e BD devem aparecer. Use o mouse para deslizar E ao longo do segmento AB. À medida que E se move de A a B, o que acontece com o valor dos ângulos ACE e BDE? Eles têm sempre o mesmo valor?

9. Você acabou de explorar três problemas do mesmo caso geral: Encontre o ponto E que minimiza o valor da expressão  $EC/r_c + ED/r_d$ . A expressão representa o tempo, pois os numeradores das frações representam a distância e os denominadores representam a razão. Alguns exemplos mais ajudarão a revelar o padrão. Preencha as lacunas em branco na tabela abaixo, e note que há duas novas quantidades de interesse. Lembre que cada linha requer uma busca em separado.

$r_C$	$r_D$	$EA$	$EC/(r_C+ED)/r_D$	$EA/EC$	$EB/ED$
10	30				
10	20				
10	10				
40	30				
20	10				
30	10				

10. À medida que a razão  $r_d$  decresce, o que acontece com a posição de ótimo do ponto E? O que acontece com a medida do segmento ED? O que acontece com o valor do ângulo BDE? São os valores de  $r_d$  e o ângulo BDE linearmente relacionados?

11. O padrão simples, conhecido como lei de Snell, relaciona os valores de  $r_c$ ,  $r_d$ ,  $EA/EC$  e  $EB/ED$ . Ele pode ser deduzido examinando-se a tabela. Expresse esta relação em palavras. Expresse-a em símbolos.

12. Escreva uma descrição trigonométrica da lei de Snell que relacione as razões  $r_c$  e  $r_d$  com os ângulos ACE e BDE.

### Investigação da elipse - Parte I

1. Clique em **Ponto\Coordenadas**. Digite 9 na caixa x e 0 na caixa y, e pressione Enter (ou clique em **marcar**). O ponto A = (9,0) aparece na tela. Da mesma forma, marque os pontos B = (-9,0) e C = (-21,0). Pressione Esc para fechar a caixa de diálogo.

2. Clique em **CircunferencialRaio-centro**, digite A na caixa "centro em", clique no botão "circunferência através de", digite C na caixa ao lado, e clique em **desenhar**. Você deve ver agora uma circunferência com centro em A e que passa por C. Pressione Esc para fechar a caixa de diálogo.

3. Com o mouse no modo **Botões\Segmentos**, aponte em qualquer lugar na circunferência e clique com o botão direito do mouse para marcar o ponto D. Use o botão esquerdo do mouse para desenhar os segmentos AD e BD.

4. O ponto D está restringido à circunferência, mas pode ser deslizado ao longo dela. Para ver isto, coloque o mouse no modo **Botões\Arrastar vértices**, aponte em D, pressione o botão esquerdo do mouse, e segure-o enquanto você arrasta o mouse.

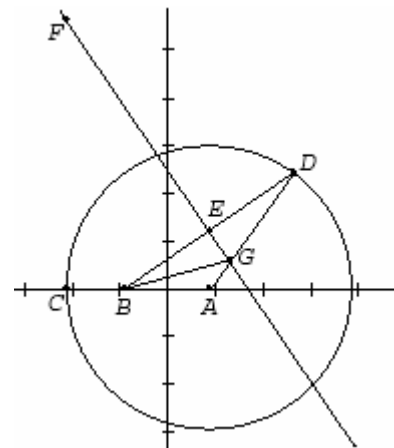
5. Clique em **RetalPerpendicularesMediatriz**, digite BD na caixa de edição, e pressione Enter. Note que o programa marcou o ponto médio e no segmento BD quando a mediatriz EF foi desenhada.

6. Coloque o mouse no modo **Botões\Segmentos**. Clique com o botão direito do mouse onde a reta EF intercepta o segmento AD. A interseção será legendada com a letra G.

7. Use o botão esquerdo do mouse para conectar G a B. A figura deve se assemelhar à ilustração.

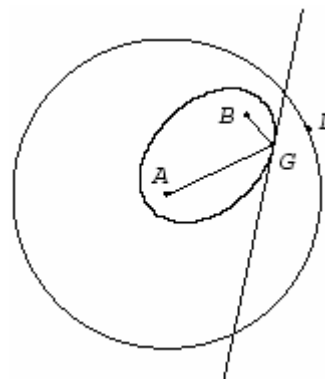
8. À medida que você responde as questões seguintes, você pode querer mover o ponto D ao longo da circunferência (primeiro coloque o mouse de volta no modo **Botões\Arrastar vértices**) e observar o que acontece às construções, especialmente o ponto G. a caixa de diálogo **Medidas** pode também ser muito útil.

(a) Qual a relação entre as medidas de GB e GD?





até C, e solte. Isto cria a circunferência do passo 2 na parte I. (Se B não estiver no interior do círculo, arraste-o para dentro antes de continuar, como já ensinado anteriormente). Coloque o mouse no modo **Botões\Segmentos** e continue com o resto da construção na parte I até se chegar ao ponto G. Diferentemente dos pontos com coordenadas específicas na parte I, estes pontos A, B e C podem ser arrastados pela tela. É interessante estudar o efeito que diferentes posições tem na aparência do rastro elíptico do ponto G.



17. Clique em **AnimlTraços** e repita o passo 9 da parte I. Para um traço mais preciso, coloque o valor 300 na caixa "passos". Selecione o item **AnimlMonitorar traços**, de forma que este traço responderá quando você arrastar os pontos, exceto D. Clique em **ArquivolSalvar** para salvar a figura antes de prosseguirmos. Arraste B próximo do centro A. Note que a forma da elipse é diferente desta vez. Agora arraste B próximo da circunferência e note a nova forma. Você também pode experimentar mudar o tamanho da circunferência, arrastando-se C. Note que a construção se desintegra se B estiver do lado de fora da circunferência. Tenha em mente que a soma  $GA+GB$  é sempre igual ao \_\_\_\_\_ da circunferência. A soma  $GA+GB$  é igual a qual dimensão da própria elipse? (veja o passo 11 da parte I).

18. A excentricidade  $AB/AD$  descreve a forma da elipse. No exemplo da parte I, a excentricidade era  $3/5$ . Use a caixa de diálogo **Medidas** para mostrar o valor de  $AB/AD$ . Quando você mover os pontos A, B, ou C, a excentricidade mudará. Qual é o intervalo de valores da excentricidade? Quais palavras você usaria para descrever a forma da elipse quando a excentricidade tem

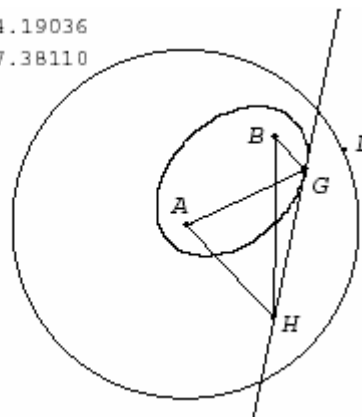
- (a) um valor próximo de zero?
- (b) um valor próximo de um?

19. Um desafio: Na parte I, as retas  $x = 25$  e  $x = -25$  eram as diretrizes da elipse. Relembre que, para qualquer ponto G na elipse, a distância de G ao foco A era três quintos da distância de G à diretriz correspondente. Isto deve ajudá-lo a construir as diretrizes para uma elipse genérica na sua figura. Estas retas devem mudar, qualquer que seja a mudança da elipse que se faça ao se mover os pontos A, B, ou C.

### Investigação da elipse - Parte III

20. Use **ArquivolAbrir** para abrir a figura salva no passo 17. Coloque o mouse no modo **Botões\Segmentos**, clique com o botão direito do mouse para gerar o ponto H na reta EF (a única reta visível na figura). Use o botão esquerdo para desenhar os segmentos HA e HB. Clique em **Medidas**, digite  $GA+GB$  e  $HA+HB$  (um de cada vez, e pressione Enter após cada um), então pressione Esc para fechar a caixa de diálogo.

$GA+GB = 4.19036$   
 $HA+HB = 7.38110$



21. Coloque o mouse no modo **Botões\Arrastar vértices** e deslize D pela circunferência, deste modo levando G pela elipse. As medidas apresentadas devem confirmar que  $GA+GB$  é constante para todos os pontos G na elipse. Esta constante é igual ao \_\_\_\_\_ da

circunferência. Agora deslize H ao longo da reta EF. Note que  $HA+HB$ , que evidentemente não é, nunca é \_\_\_\_\_ que a soma  $GA+GB$ . O que isto nos diz a respeito da relação entre a elipse e a reta?

22. Pressione Ctrl+L para mostrar todas as legendas dos pontos. Deslize o ponto H tal que G esteja entre F e H, então clique em **Medidas** e digite <FGB e <HGA para se mostrar os valores destes ângulos. Deslize D pela circunferência de forma que G deslize ao redor da elipse, e veja as medidas dos ângulos. Que importante propriedade da elipse isto ilustra? Explique como esta propriedade assegura que o valor mínimo de  $HA+HB$  para o ponto H na reta FG deve ocorrer de fato quando H coincidir com G.

#### Investigação da elipse - Parte IV (sumário)

23. Clique em **Arquivo|Novo** para iniciar um novo desenho. Coloque o mouse no modo **Botões|Segmentos**, clique com o botão direito do mouse para criar três pontos A, B, e C na tela, e use o botão esquerdo para desenhar os segmentos AC e BC.

24. Suponha que os pontos A e B representem os pontos focais de uma elipse, e que C é um ponto nesta elipse. O problema é construir a reta que seja tangente à elipse em C. Isto pode ser feito em duas etapas. Primeiro clique em **Reta|Ângulos|Bissecionar existentes**, digite ACB na caixa de edição, e pressione Enter. A bissetriz CD deve aparecer. Em seguida clique em **Reta|Perpendiculares|Geral**, digite CD na caixa “perpendicular à”, digite C na caixa “pelo ponto”, e clique em **desenhar**. A reta tangente CE aparece. Clique em Esc para fechar a caixa.

25. Em virtude da bissetriz não ser mais necessária, podemos apagá-las indo em **Editar|Apagar|Reta** para remover CD, e clique em **Editar|Apagar|Ponto** para remover o ponto D. Agora coloque o mouse no modo **Botões|Arrastar vértices**. Arraste C pela tela e note como a reta CE rege. Em razão da soma  $AC+BC$  não se manter constante, cada reta CE é tangente à uma elipse diferente. Para ver as elipses, abra a caixa de diálogo **Unidades|Cônicas com 3 pontos**. Clique no botão **elipse**, digite AB na caixa “pontos focais”, digite C na caixa “ponto sobre a”, e clique em **desenhar**. A elipse é adicionada na lista logo abaixo, e a curva aparece na tela. Pressione Esc para fechar a caixa de diálogo.

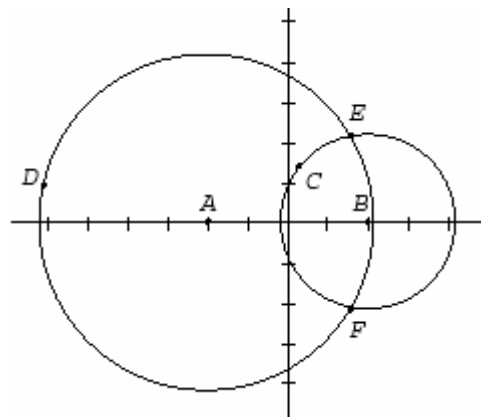
#### Investigação da hipérbole - Parte I

1. Abra a caixa de diálogo **Ponto|Coordenadas**. Digite -2 na caixa “x” e 0 na caixa “y”, então pressione Enter para fazer  $A = (-2,0)$  aparecer na tela. De modo similar, faça  $B = (2,0)$  aparecer. Pressione Esc para fechar a caixa de diálogo.

2. Com o mouse no modo **Botões|Segmentos**, clique com o botão direito do mouse em um lugar a meio caminho de A e B para criar o ponto C.

3. Clique em **Circunferencial|Raio-centro**, digite B na caixa “centro em”, selecione a opção “circunferência através de” e digite C na caixa ao lado, e clique em **desenhar**. Agora digite A na caixa “centro em”, clique na opção “raio da circunferência”, digite  $2+BC$  na caixa ao lado e clique em **desenhar**. Pressione Esc para fechar a caixa de diálogo.

4. A menos que C esteja muito próximo de B, as circunferências que foram desenhadas devem se interceptar em dois pontos. Clique com o botão direito do mouse nestes dois pontos. As legendas E e F serão aplicadas às interseções.



5. As coordenadas de E e F podem ser mostradas: Abra a caixa de diálogo **Medidas**, digite E e pressione Enter, digite F e pressione Enter, então pressione Esc.

6. Clique em **Botões|Segmentos** e com o botão esquerdo do mouse crie os segmentos EB e EA. Após isso, abra a caixa de diálogo **Medidas** e digite EB, e pressione Enter, e EA também pressionando Enter ao final. Pressione em Esc para fechar a caixa de diálogo. Coloque o mouse no modo **Botões|Arrastar vértices**. Arraste o ponto C (que é na verdade o único ponto que pode ser arrastado). Você verá que, quando o ponto estiver duas unidades mais próximas de B do que de A (você vai perceber isso olhando para os valores de EB e EA), a coordenada y dos pontos de interseção é aproximadamente 5, e a coordenada x é aproximadamente \_\_\_\_\_ . Outro caso especial ocorre quando os pontos de interseção desaparecem; a coordenada x deve ser igual a \_\_\_\_\_ .

7. Clique em **Anim|Traço temporário**, digite EF na caixa de edição, e pressione Enter. Agora, quando você arrastar C pela tela, o programa mostra todas as posições correspondentes para E e F na figura. Mais pontos são mostrados quando se move C vagarosamente. Esta é só um traço temporário, contudo, este traço desaparece com mudanças feitas na tela. Uma maneira de se obter traços permanentes é obtido a seguir. A curva que aparece chama-se hipérbole.

### Investigação da hipérbole - Parte II

8. Comece um novo desenho com os mesmos pontos A e B do exemplo anterior. Uma maneira de se fazer isto é clicar em **Editar|Desfazer** (ou pressione Ctrl+Z) até o ponto C desaparecer. Outra maneira é clicar em **Arquivo|Novo** e entrar com as coordenadas para A = (-2, 0) e B = (2, 0) novamente, usando a caixa de diálogo **Ponto|Coordenadas**.

9. Abra a caixa de diálogo **CircunferencialRaio-centro**. Digite A na caixa "centro em", clique na opção **radio**, digite 2 na caixa de edição ao lado, e clique em **desenhar**. Uma circunferência de raio 2 aparece, com um ponto C marcado nela. Pressione Esc para fechar a caixa de diálogo.

10. Com o mouse no modo **Botões|Segmentos**, clique com o botão direito para criar um ponto D qualquer sobre a circunferência, razoavelmente próximo do eixo y. Use o botão esquerdo do mouse para desenhar o segmento BD. Com o mouse no modo **Botões|Semi-retas**, use o botão esquerdo para desenhar a semi-reta AD.

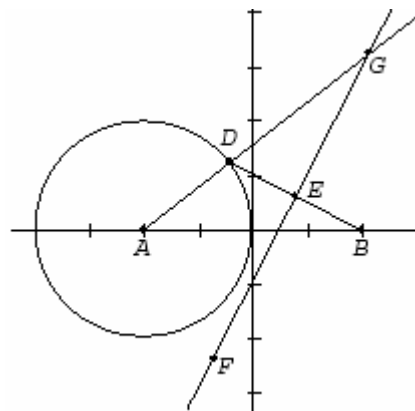
11. Clique em **RetalPerpendiculares|Mediatriz**, digite BD na caixa de edição e pressione Enter. Note que o programa automaticamente marca o ponto médio E do segmento BD quando é desenhada a mediatriz.

12. Aponte a seta do mouse para a interseção da semi-reta AB com a reta FE, e clique com o botão direito. A legenda G aparece, como mostrado na ilustração.

13. Explique por que  $GA - GB = AD = 2$ , não importando qual seja a posição de D.

14. Clique em **Anim|Traço temporário**, digite G na caixa de edição e pressione Enter. Coloque o mouse no modo **Botões|Arrastar vértices** e deslize D vagarosamente pela circunferência. Explique por que o traço de G consiste de pontos que já apareceram no exemplo passado (item 7). Note também que, para muitas posições de D, não há o ponto G.

15. Para um traço permanente e mais preciso, abra a caixa de diálogo **Anim|Traços** e clique no botão **novo**. Clique no botão **vértice** na opção



**controle** e digite D na caixa ao lado (isto informa ao programa para se gerar um rastro ao se deslizar D). Clique em **sobre o vértice** e digite G na caixa adjacente. Use os valores mostrados para “passos” (100), “menor” (0.0), e “maior” (1.0). Pressione Enter. O programa marcará 100 diferentes posições para G, e conectará os pontos para formar uma curva. A construção é sobreposta.

### Investigação da hipérbole - Parte III

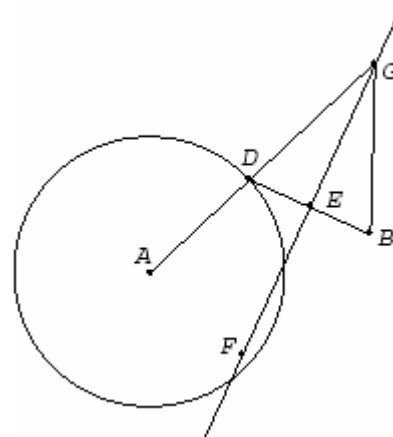
18. Clique em **Arquivo|Novo** para começar um novo desenho, e coloque o mouse no modo **Botões|Segmentos**. Se os eixos coordenados ainda aparecerem na tela, pressione Ctrl+A para removê-los. Use o botão direito do mouse para marcar dois pontos aleatórios A e B, e um terceiro ponto aleatório C tal que este esteja mais próximo de A do que de B.

19. Clique em **Circunferencial|Raio-centro**, digite A na caixa “centro em”, clique na opção **circunferência através de**, digite C na caixa ao lado, e clique em **desenhar**. Você deve ver uma circunferência com centro em A através do ponto C. Pressione Esc para fechar a caixa de diálogo.

20. Aponte a seta do mouse em qualquer lugar na circunferência e clique com o botão direito para marcar um ponto D. então use o botão esquerdo para desenhar os segmentos AD e BD.

21. O ponto D pode ser arrastado somente ao longo da circunferência. Para ver isto, coloque o mouse no modo **Botões|Arrastar vértices**, aponte a seta do mouse em D, pressione o botão esquerdo, e segure-o enquanto se arrasta o mouse. Quando o ponto D estiver aproximadamente entre A e B, solte o botão do mouse.

22. Clique em **Retal|Perpendiculares|Mediatriz**, digite BD na caixa de edição e pressione Enter. Note que o programa marca um ponto médio E no segmento BD quando desenha a mediatriz EF.



23. Para que o próximo ponto apareça, selecione o item **Outros|Autoestender**. Clique em **Ponto|Interseção|Reta-reta**, digite EF em uma caixa e AD na outra, e clique em **marcar**. A legenda G aparece para marcar a interseção da reta EF e da semi-reta AD. Pressione Esc para fechar a caixa de diálogo.

24. Coloque o mouse no modo **Botões|Segmentos**, e use o botão esquerdo para desenhar BG. A figura deve se parecer com a ilustração acima.

25. Para responder às questões abaixo, é interessante deslizar o ponto D pela circunferência (primeiro coloque o mouse no modo **Botões|Arrastar vértices**). Observe o que acontece com as construções, especialmente o ponto G. A caixa de diálogo **Medidas** pode também ser útil.

(a) Qual a relação entre as medidas de GB e GD?

(b) O que é sempre verdade sobre a diferença  $GA - GB$ , não importando a posição do ponto D? Responda com cuidado – esta diferença não é sempre positiva.

(c) Descreva como o traço do ponto G parecerá quando se move o ponto D ao longo da circunferência.

### Investigação da hipérbole - Parte III (continuação)

26. Para ver o desenho do rastro de G, abra a caixa de diálogo **Anim|Traços** e clique em **novo**. Clique em **vértice** em **controle** e digite D na caixa ao lado (isto informa ao programa para se gerar um rastro ao se deslizar D). Clique em **sobre o vértice** e digite G na caixa ao

lado. Use os valores mostrados para “passos” (100), “menor” (0.0), e “maior” (1.0). Pressione Enter. O programa marcará 100 diferentes posições para G, e conectará os pontos para formar uma curva. A construção é sobreposta.

27. Vamos apagar alguns itens que não são mais necessários. Clique em **Editar|Apagar|Reta**, digite DB na caixa e pressione Enter. Clique em **Editar|Legendas|Individual**, desmarque a seleção em **mostrar legenda**, digite EF na caixa “vértices”, e clique em **aplicar**. Pressione Esc para fechar a caixa de diálogo. A figura deve se parecer com a ilustração ao lado.

28. Com o mouse no modo **Botões|Arrastar vértices**, você pode arrastar A, B, e C pela tela e ver o efeito que isto tem na traço. Selecione o item **Anim|Monitorar traços**, de forma que o traço responderá a mudança dos pontos, exceto para o ponto D. Clique em **Arquivo|Salvar como** antes de prosseguir. É interessante ver o que acontece ao traço quando B está mais próximo de A do que de C – a hipérbole se torna uma elipse!

29. Resuma a construção representada pelos pontos A, D, o raio AC e a reta EF.

#### **Investigação da hipérbole - Parte IV (sumário)**

30. Clique em **Arquivo|Novo** para iniciar uma nova tela. Coloque o mouse no modo **Botões|Segmentos**, clique com o botão direito do mouse para inserir três pontos A, B, e C na tela, e use o botão esquerdo para desenhar os segmentos AC e BC.

31. Suponha que os pontos A e B representem os pontos focais de uma hipérbole, e que c é um ponto da hipérbole. O problema é construir a reta que é tangente à hipérbole em C. Isto pode ser feito rapidamente. Primeiro clique em **Reta|Ângulos|Bissecionar existentes**, digite ACB na caixa de edição e pressione Enter. A bissetriz CD aparecerá. Para tornar a semi-reta que é a bissetriz CD em uma reta tangente, clique em **Reta|Extensões**, digite DC na caixa de edição e pressione Enter.

32. Agora coloque o mouse no modo **Botões|Arrastar vértices**. Arraste o ponto C pela tela e note como a reta CD reage. Em razão da diferença dos comprimentos AC–BC não se manterem constantes, cada reta CD é tangente a uma hipérbole diferente. Para ver as hipérbolas, abra a caixa de diálogo **Unidades|Cônicas com 3 pontos**. Clique na opção **hipérbole**, digite AB na caixa “pontos focais”, digite C na caixa “ponto sobre a”, e clique em **desenhar**. A hipérbole é adicionada à relação de cônicas, e a curva aparece na tela. Pressione Esc para fechar a caixa de diálogo.

